§6: Graphen

⚠ Bei diesem Thema gibt es keine einheitlichen Definitionen.

Def: 1) Ein (endlicher) ungerichteter Graph $G=(V,E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V [Ecken, Knoten]
- einer Menge $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$. [Kanten]

2) Ein (endlicher) gerichteter Graph $G=(V,E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V [Ecken, Knoten]
- einer Menge $E \subseteq \{(u,v) \in V \times V \mid u \neq v\}$. [Kanten]

Beispiele: a) Seien $V_1 = \{1,2,3,4\}$ und $E_1 = \{\{i,j\} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$.
$G_1 = (V_1, E_1)$ ist ein ungerichteter Graph.

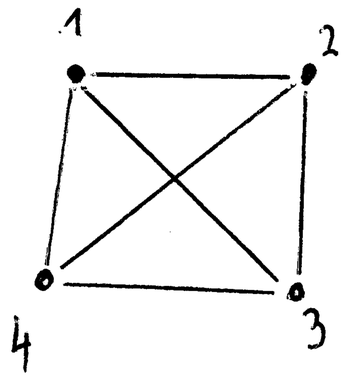
b) Seien $V_2 = \{1,2,3\}$ und $E_2 = \{(1,2), (1,3)\}$. $G_2 = (V_2, E_2)$ ist ein gerichteter Graph.

Graphische Darstellung:

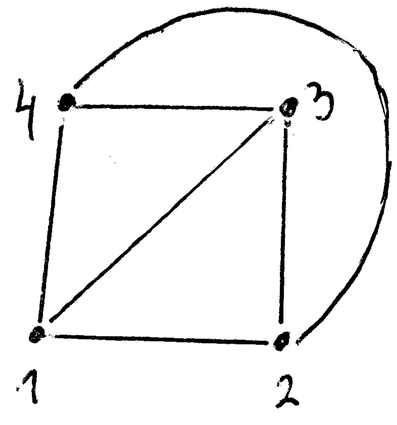
Die Knoten werden als Punkte (meistens in der Ebene) gezeichnet, die Kanten als ungerichtete (bzw. gerichtete) Strecken (oder Kurvenstücke), die die entsprechenden Punkte verbinden.

Beispiele:

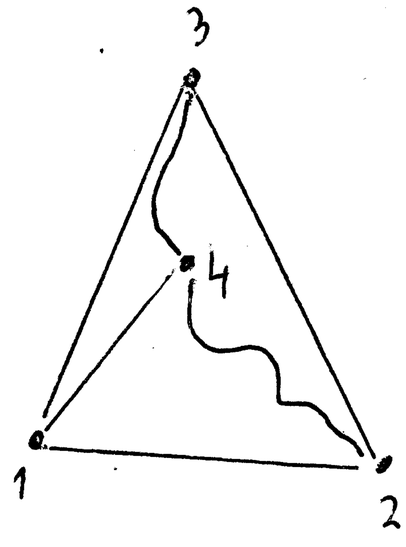
Zu G_1:



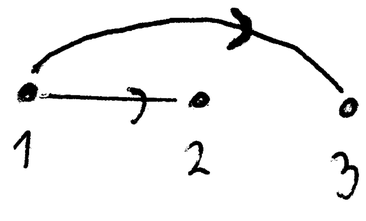
oder



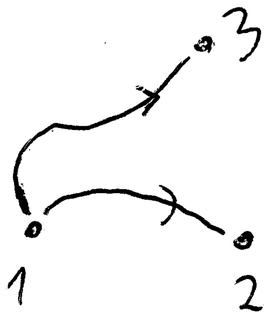
oder



Zu G_2:



oder



oder...

Def: a) Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.

i) Ein Weg in G ist eine Folge $v_1, v_2, \dots, v_n$ aus V mit $n \geq 2$ und $e_i := \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i \leq n-1$.

ii) Ein Kreis in G ist ein Weg $v_1, v_2, \dots, v_n$ mit $v_1 = v_n$ und $n \geq 4$ und $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq n-1$.

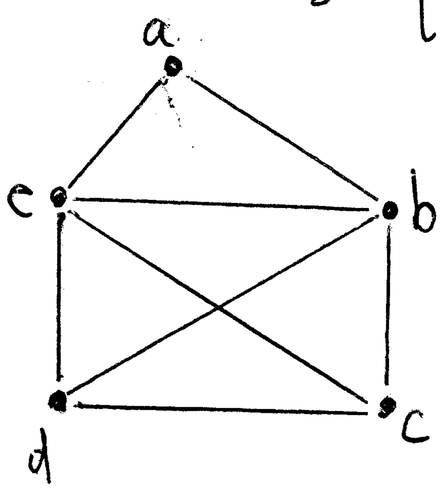
b) Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph.

i) Ein Weg in G ist eine Folge $v_1, \dots, v_n$ aus V mit $n \geq 2$ und $e_i := (v_i, v_{i+1}) \in E$ für $1 \leq i \leq n-1$.

ii) Ein Kreis in G ist ein Weg $v_1, \dots, v_n$ mit $v_1 = v_n$ und $n \geq 4$ und $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq n-1$.

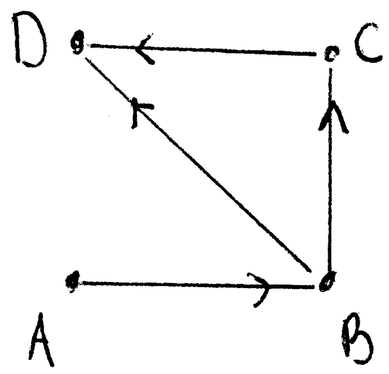
Beispiele: Sei $G_3 = (V_3, E_3)$ mit $V_3 = \{a,b,c,d,e\}$ und

$E_3 = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{e,a\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{c,e\}\}$.



- a, b, d, c ist ein Weg
- c, a, e, d ist kein Weg ($\{c,a\} \notin E_3$)
- a, b, c, e, a ist ein Kreis
- d, c, e, b, c, d ist kein Kreis (2 mal c).

Sei $G_4 = (V_4, E_4)$ mit $V_4 = \{A, B, C, D\}$, $E_4 = \{(A,B), (B,C), (C,D), (B,D)\}$. 3



A, B, C ist ein Weg

A, B, D, C ist kein Weg $[(D,C) \notin E_4]$

Es gibt keinen Kreis.

Def: i) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heisst zusammenhängend falls $\forall v, w \in V$ mit $v \neq w$ existiert ein Weg $v = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = w$.

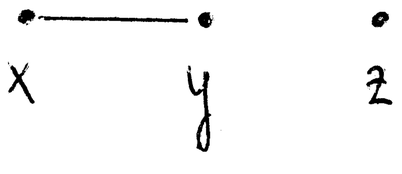
ii) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heisst Baum wenn G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Beispiele: G_1, G_3 sind zusammenhängend.

G_1 ist kein Baum denn 1, 2, 3, 1 ist ein Kreis.

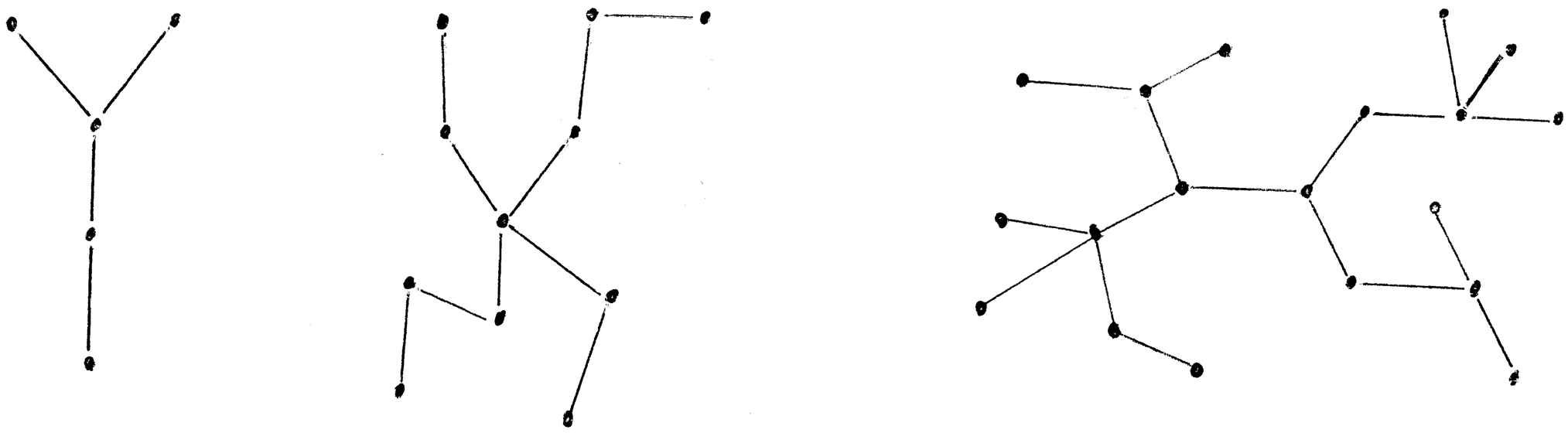
G_3 " " " " a, b, c, d, e, a ist ein Kreis.

Sei $G_5 = (V_5, E_5)$ mit $V_5 = \{x, y, z\}$ und $E_5 = \{\{x, y\}\}$.



G_5 ist nicht zusammenhängend [kein Weg zwischen x und z].

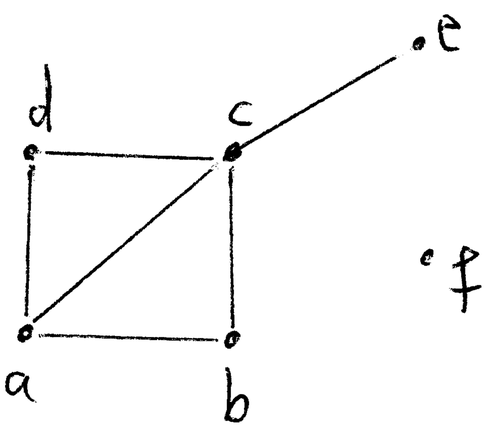
Typische Bäume



Def: Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph, $v \in V$.
Der Grad von v ist die Anzahl $\deg_G(v)$ seiner Nachbarn
[$w \in V$ ist Nachbar von v wenn $\{v,w\} \in E$]

Beispiel:

G:



$\deg_G(a)=3$, $\deg_G(b)=2=\deg_G(d)$,
$\deg_G(c)=4$, $\deg_G(e)=1$, $\deg_G(f)=0$.

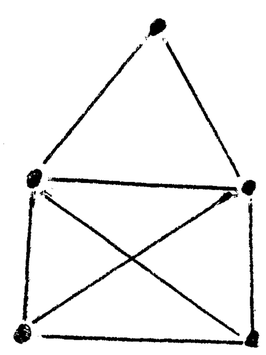
Def: Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph.

i) Eine eulersche Tour in G ist ein Weg $v_1,\dots,v_{n-1},v_n=v_1$, der jede Kante genau ein mal durchläuft (also $\forall e \in E\ \exists!\, i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ mit $e=\{v_i,v_{i+1}\}$)

ii) G heißt eulersch wenn G eine eulersche Tour hat.

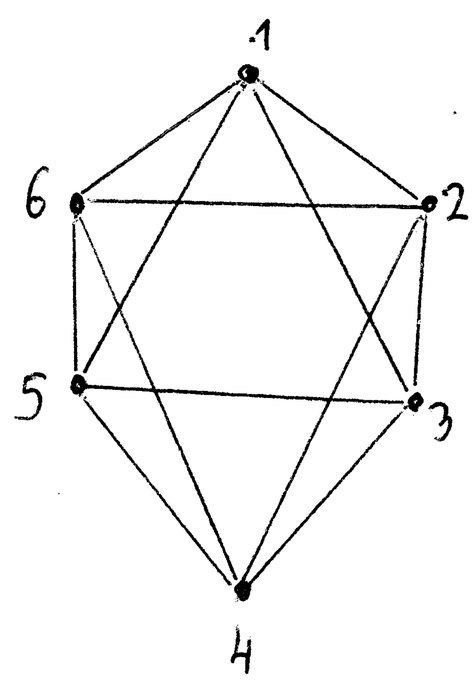
Beispiele:

i)



ist nicht eulersch. [S. Satz 6.1]

ii)



ist eulersch:

1, 5, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 1, 2, 4, 6, 1 ist eine eulersche Tour.

Satz 6.1 (Euler, 1736)

Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph.
Dann: G ist genau dann eulersch, wenn $\deg_G(v)$ gerade ist $\forall v \in V$.

Beweis von "$\Rightarrow$": Ang, G ist eulersch.

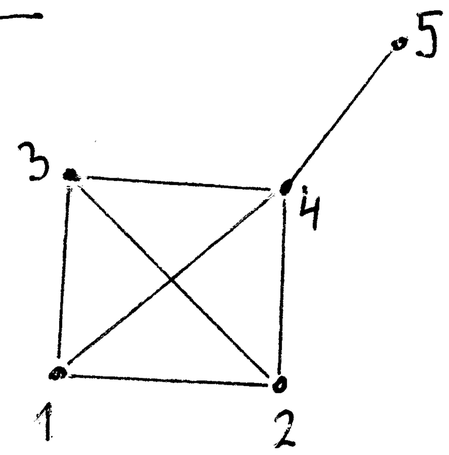
Sei $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_1$ eine eulersche Tour in G.
Sei $v \in V$. Tritt v in der Folge $v_1, \dots, v_{n-1}$ genau t-mal auf, so gilt $\deg_G(v) = 2t$, d.h. v hat geraden Grad.

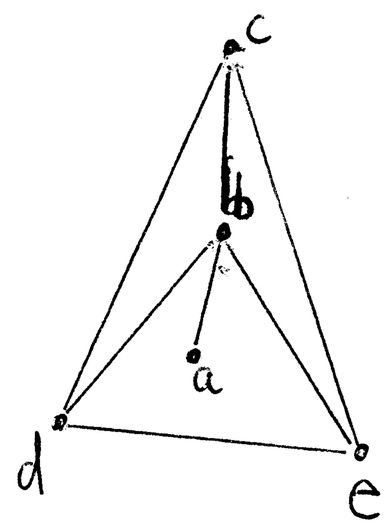
$\square$

Def: i) Seien $G_1=(V_1,E_1)$ und $G_2=(V_2,E_2)$ ungerichtete Graphen.
G_1 und G_2 heißen isomorph falls $\exists f: V_1 \to V_2$ bijektiv sodass $\forall u,v \in V_1$ gilt $\{u,v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$.

ii) Seien $G_1=(V_1,E_1)$ und $G_2=(V_2,E_2)$ gerichtete Graphen.
G_1 und G_2 heißen isomorph falls $\exists f: V_1 \to V_2$ bijektiv sodass $\forall u,v \in V_1$ gilt $(u,v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$.

Beispiele:

i) G_1: 

und G_2: 

sind isomorph.

Isomorphism: $f: \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{a,b,c,d,e\}$

$1 \longmapsto c$
$2 \longmapsto d$
$3 \longmapsto e$
$4 \longmapsto b$
$5 \longmapsto a$

Lemma 6.2:

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei endliche ungerichtete Graphen.

a) Wenn $f: V_1 \to V_2$ ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 ist, dann gelten:

i) $\deg_{G_2} f(v) = \deg_{G_1}(v) \quad \forall v \in V_1$.

ii) $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_1$ ist ein Kreis in G_1 $\Leftrightarrow$
$f(v_1), \dots, f(v_{n-1}), f(v_n) = f(v_1)$ ist ein Kreis in G_2.

b) Ang. G_1 und G_2 sind isomorph. Dann:

i) $|V_1| = |V_2|$ und $|E_1| = |E_2|$

ii) G_1 ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ G_2 ist zusammenhängend.

iii) G_1 ist ein Baum $\Leftrightarrow$ G_2 ist ein Baum.

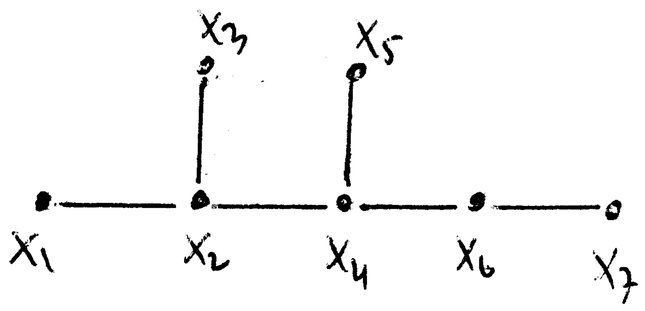
iv) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:
G_1 hat genau k Knoten vom Grad n $\Leftrightarrow$
G_2 " " " " " " n.

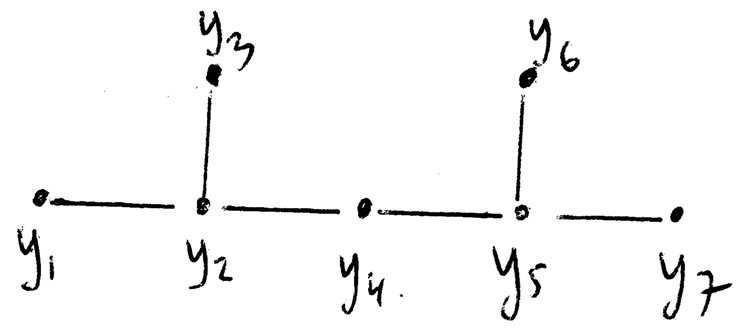
v) G_1 ist eulersch $\Leftrightarrow$ G_2 ist eulersch.

Beweis: s. Übung

Konsequenz: Wenn eine von den 5 Eigenschaften aus 6.2b) nicht erfüllt ist, dann sind G_1 und G_2 nicht isomorph.

Beispiel: Die beiden Graphen

G_1: 

und G_2: 

Ang. $f: \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$ ist ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2.

$\deg_{G_1}(x_6) = 2 \overset{6.2.a)i)}{\Longrightarrow} \deg_{G_2} f(x_6) = 2$. Der einzige Knoten aus G_2 mit Grad 2 ist y_4. Also $f(x_6) = y_4$. x_6, x_7 benachbart in $G_1 \Rightarrow$ $f(x_6) = y_4$, $f(x_7)$ benachbart in $G_2 \Rightarrow f(x_7) = y_2$ oder y_5.

$$\begin{cases} \deg_{G_1}(x_7) = 1 \\ \deg_{G_2}(y_2) = \deg_{G_2}(y_5) = 3 = \deg_{G_2}(f(x_7)) \end{cases} \overset{6.2a)i)}{\Longrightarrow} 1 = 3 \quad \lightning$$

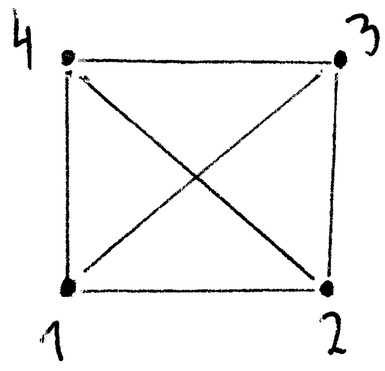
Also sind G_1 und G_2 nicht isomorph.

Planarität

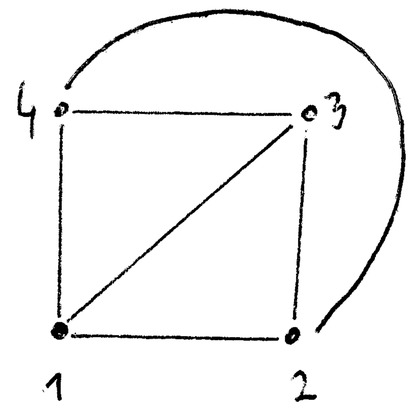
Zur Erinnerung: Wir betrachten nur <u>endliche</u> Graphen, also Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| < \infty$.

Def: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt <u>planar</u>, wenn er in die Ebene $\mathbb{R}^2$ gezeichnet werden kann, ohne dass sich Kanten kreuzen.

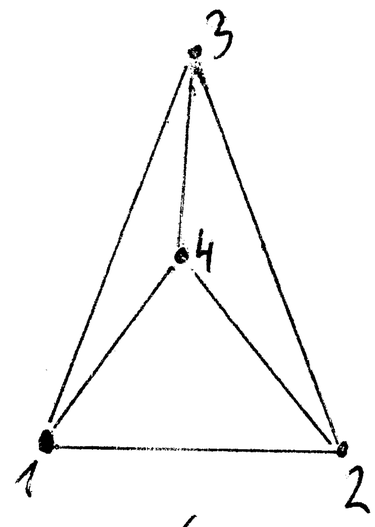
Beispiele: 1) $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$.



X



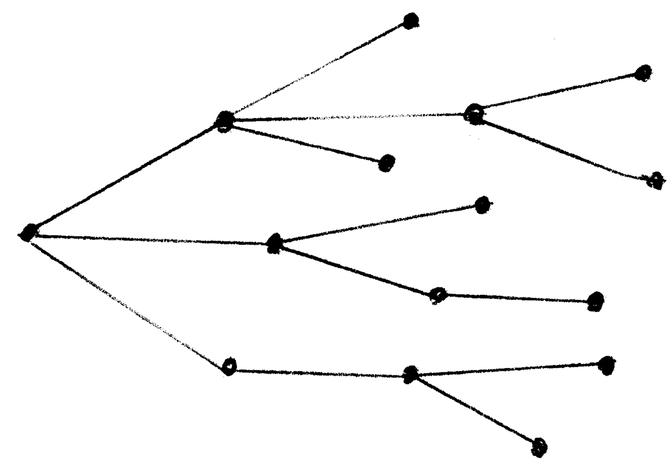
✓



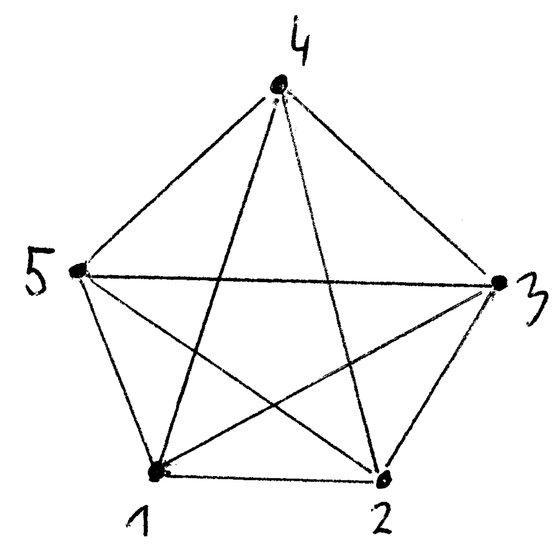
✓

G ist planar.

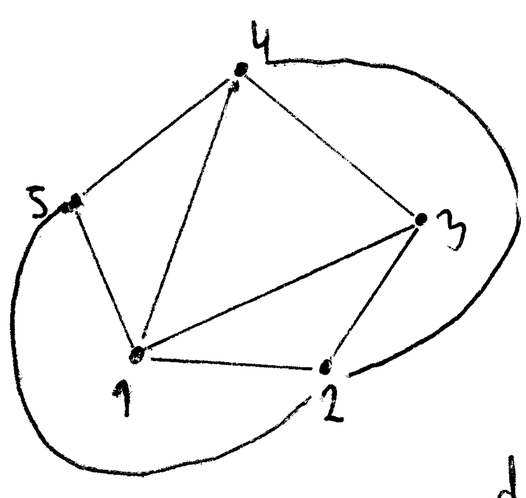
2) Jeder Baum $G=(V,E)$ ist planar:



3) $G=(V,E)$ mit $V=\{1,2,3,4,5\}$ und $E=\{\{i,j\} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$ ist nicht planar (s. unten).



Versuch:

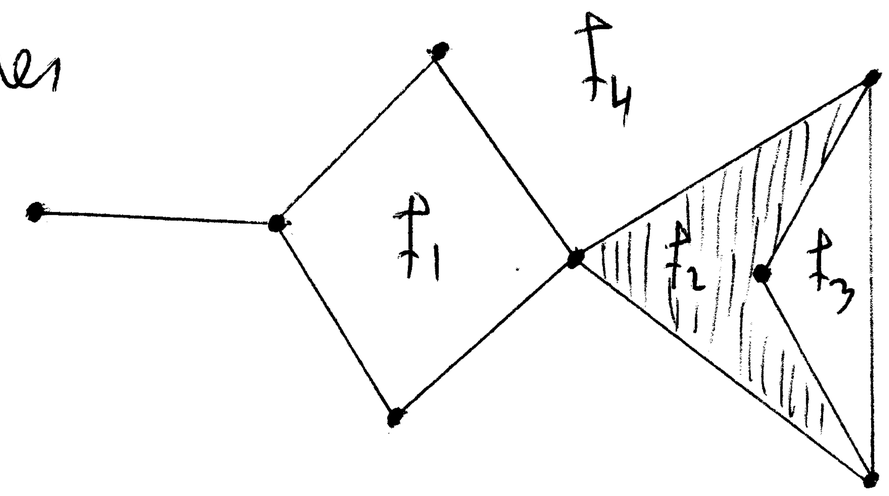


3 und 5 können nicht mehr verbunden werden, ohne dass die Kante 3,5 eine andere Kante schneidet.

Ziel: Kriterium für die Planarität.

Def: Sei $G=(V,E)$ ein planarer Graph.
Jede kreuzfreie Zeichnung von G teilt die Ebene $\mathbb{R}^2$ in Gebiete (Flächen), die von den Kanten begrenzt werden.
Die begrenzenden Kanten eines Gebietes bilden seinen Rand.

Man bezeichnet mit F die Gebietsmenge und $|F|$ ist die Gebietsanzahl von der Zeichnung von G.



$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, $|F| = 4$.

Bem: Wenn die Kanten Kurven (und nicht Verbindungsstrecken) sind ist es ziemlich schwierig zu zeigen, dass eine kreuzfreie Zeichnung die Ebene $\mathbb{R}^2$ in Gebiete teilt.

Lemma 6.3: Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Dann:

a) Es gilt $|E| = |V| - 1$.

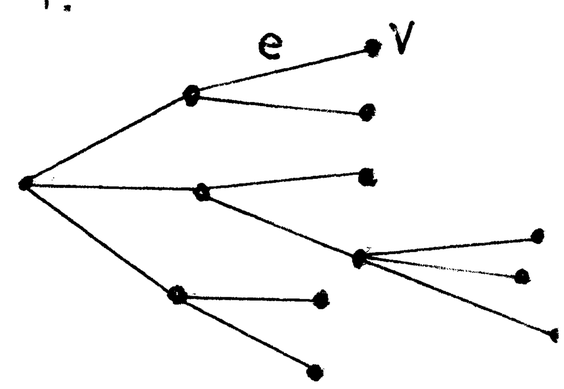
b) Für jede kreuzfreie Zeichnung von $G = (V, E)$ gilt $|F| = 1$.

Beweis: Zu a): Induktion über $n := |V|$.

$n = 1$: $V = \{a\} \Rightarrow E = \emptyset$. Also $|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$.

$n \to n+1$: Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n+1$.

Sei $v \in V$ mit $\deg_G(v) = 1$ und $e \in E$ mit $v \in e$.

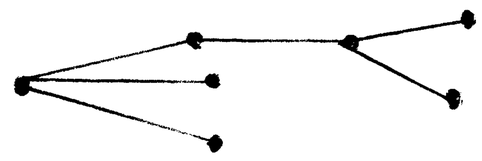


Sei $G' = (V', E')$ mit $V' := V \setminus \{v\}$ und $E' = E \setminus \{e\}$.

$\deg_G(v) = 1 \Rightarrow G'$ ist zusammenhängend $\Rightarrow G'$ ist ein Baum.

$$|V'| = |V \setminus \{v\}| = n+1-1 = n \underset{\text{für } G'}{\overset{\text{I.V}}{\Longrightarrow}} |E'| = |V'| - 1 \Rightarrow |E| = |E'| + 1 = |V'| = |V| - 1.$$

Zu b): Intuitiv klar:



$\square$

Satz 6.4 (Euler, 1758)

Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender planarer Graph.
Für jede kreuzfreie Zeichnung von G gilt $|V|-|E|+|F|=2$.
[Insbesondere ist die Gebietsanzahl $|F|$ von der kreuzfreien Zeichnung unabhängig]

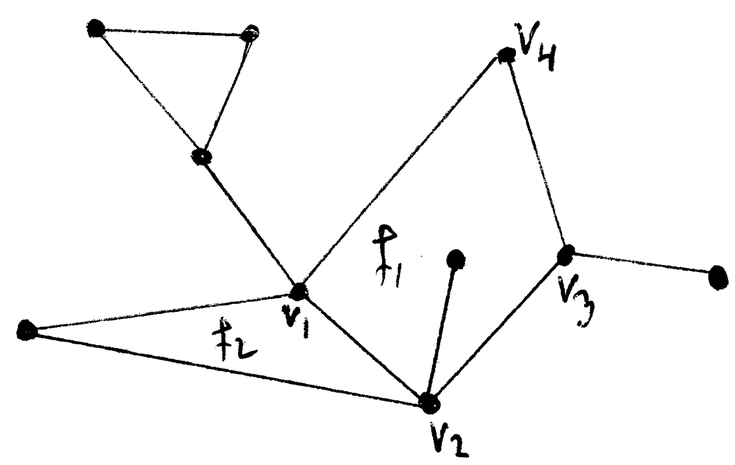
Beweis: Induktion über $n:=|F|$.

$n=|F|=1$: Dann ist G ein Baum. [Wenn G einen Kreis hätte, dann würde dieser Kreis die Ebene $\mathbb{R}^2$ in 2 Gebiete teilen und wir hätten $|F|\geq 2$]. Nach dem Lemma 6.3 gilt $|E|=|V|-1$, also
$|V|-|E|+|F| = |V|-(|V|-1)+1 = 2$.

$n \to n+1$: Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit einer kreuzfreien Zeichnung gegeben, die die Ebene $\mathbb{R}^2$ in $n+1=|F|$ Gebiete teilt.

$n+1 \geq 2 \Rightarrow G$ hat einen Kreis $v_1,\dots,v_{n-1},v_n=v_1$ mit $n\geq 4$ [$v_i \neq v_j$ $\forall i\neq j$, $1\leq i,j\leq n-1$].

G:



Sei $G'=(V',E')$ mit $V'=V$ und $E'=E\setminus\{\{v_1,v_2\}\}$.
G' ist ein zusammenhängender planarer Graph, und die kreuzfreie Zeichnung von G' teilt $\mathbb{R}^2$ in $n=|F|-1$ Gebiete [die zwei Gebiete f_1,f_2 aus G bilden nur noch <u>ein</u> Gebiet aus G'].

Für den Graphen G' gilt nach I.V $|V'|-|E'|+n=2$,
also $|V|-(|E|-1)+|F|-1=2$, d.h. $|V|-|E|+|F|=2$. $\square$

<u>Korollar 6.5:</u> Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $|V|\geq 3$. Dann gelten:

a) $|E|\leq 3|V|-6$.

b) $|E|\leq 2|V|-4$ wenn G kein Dreieck enthält.
Kreis der Form $v_1, v_2, v_3, v_4=v_1$.

Zum Beweis von 6.5 brauchen wir das folgende Lemma (s. Üb):

<u>Lemma 6.6:</u> (Prinzip des doppelten Abzählens)
Seien A, B endliche Mengen und $I\subseteq A\times B$.
Für $a\in A$ setzen wir $r(a):=\{b\in B \mid (a,b)\in I\}$ und für $b\in B$ setzen wir $r(b):=\{a\in A \mid (a,b)\in I\}$.

Dann gilt $\sum_{a\in A}|r(a)| = \sum_{b\in B}|r(b)|$. $\square$

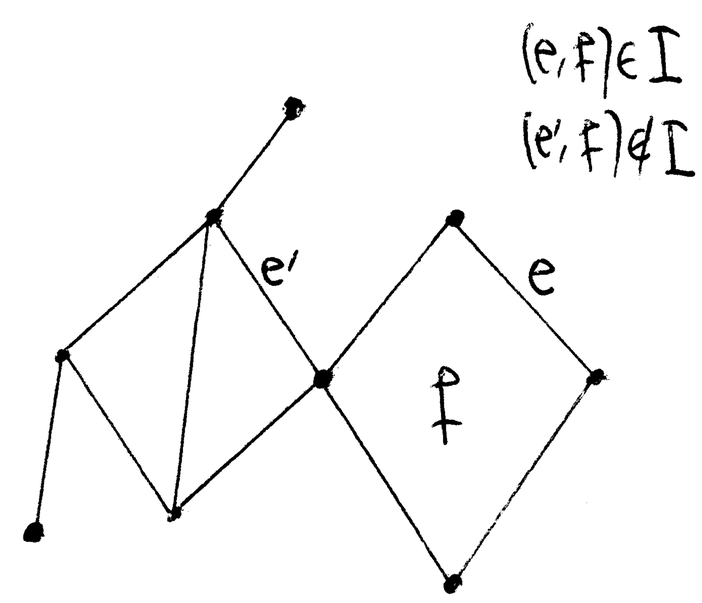
<u>Beweis von 6.5:</u>
Wir betrachten eine kreuzfreie Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$.
Satz 6.4 $\Rightarrow |V|-|E|+|F|=2$. OBdA, $|E|\geq 3$.

Sei $I:=\{(e,f)\in E\times F \mid e \text{ gehört zum Rand von } f\}$

Seien $r(e):=\{f\in F \mid (e,f)\in I\}$, $e\in E$

$r(f):=\{e\in E \mid (e,f)\in I\}$, $f\in F$.

G:



Zu a): Es gilt $|r(e)| \leq 2$ $\forall e \in E$ und $|r(f)| \geq 3$ $\forall f \in F$ [denn $|V| \geq 3, |E| \geq 3$]

6.6 $\Rightarrow \sum_{e \in E} |r(e)| = \sum_{f \in F} |r(f)|$. Daraus folgt

$\sum_{e \in E} |r(e)| \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$ und $\sum_{f \in F} |r(f)| \geq \sum_{f \in F} 3 = 3|F|$. Also $3|F| \leq 2|E|$.

Satz 6.4 $\Rightarrow |V| - |E| + |F| = 2 \Rightarrow 3|V| - 3|E| + 3|F| = 6 \Rightarrow$

$6 \leq 3|V| - 3|E| + 2|E| = 3|V| - |E| \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$.

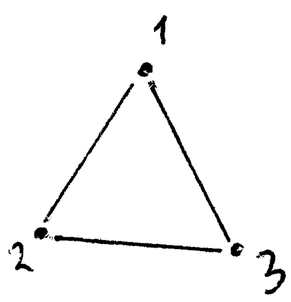
Zu b): $G = (V, E)$ dreiecksfrei $\Rightarrow |r(f)| \geq 4$ $\forall f \in F$. Dann genau wie in a) vorgehen. $\square$

Def: Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$.

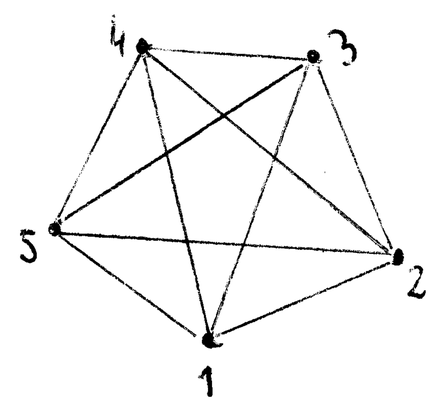
i) Der vollständige Graph K_n besteht aus n Knoten und allen möglichen $\binom{n}{2}$ Kanten. Also $K_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und

$$E_n = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

K_3:



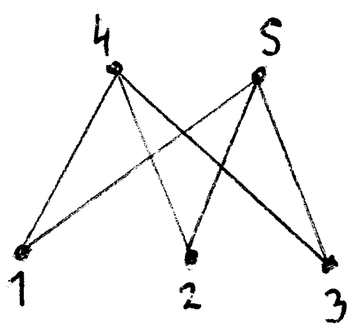
K_5:



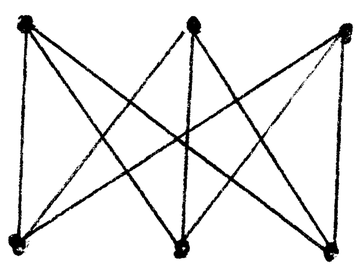
ii) Der vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$ besteht aus $n+m$ Knoten und allen nm Kanten, die jeweils einen der n Knoten mit einem der m Knoten verbinden. Also $K_{n,m} = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\}$ und

$$E = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m\}.$$

$K_{3,2}$:



$K_{3,3}$:



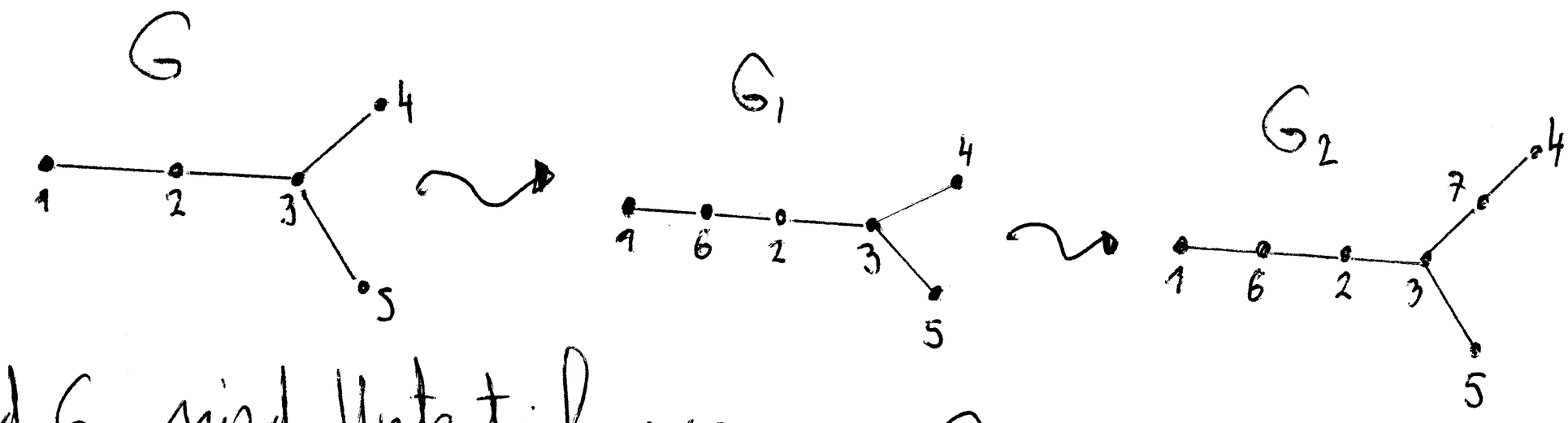
Satz 6.7: a) K_5 ist nicht planar. b) $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis: Zu a): Wenn K_5 planar wäre, dann hätten wir nach 6.5a) $|E_5| \leq 3|V_5| - 6$, also $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ↯

Zu b): $K_{3,3}$ ist dreiecksfrei (s. Bild, S. 12). Wenn $K_{3,3}$ planar wäre, dann hätten wir nach 6.5b) $|E| \leq 2|V| - 4$, also $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ ↯ □

Def: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Unterteilung von G ist ein Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, der dadurch entsteht, dass man "in Kanten zusätzliche Ecken einfügt", genauer eine Kante $\{u, v\}$ nach Einführung einer neuen Ecke w durch die Kanten $\{u, w\}$ und $\{w, v\}$ ersetzt und einen neuen solchen Vorgang evtl mehrfach wiederholt.

Bspl:



G_1 und G_2 sind Unterteilungen von G.

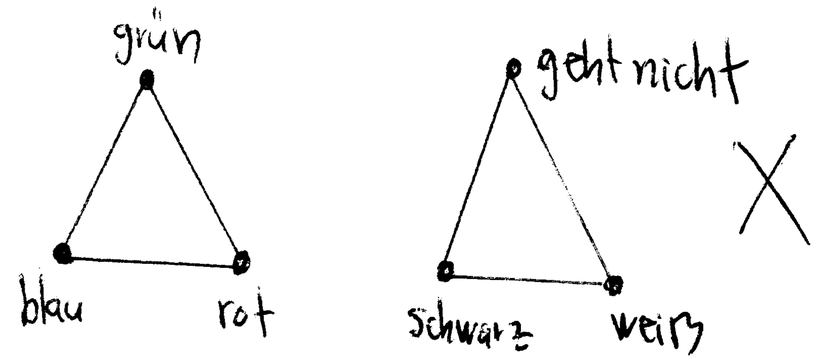
Satz 6.8 (Kuratowski, 1930)
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ enthält.

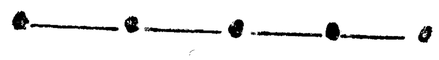
Beweis: "$\Rightarrow$" Klar denn K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.
"$\Leftarrow$" Viel schwieriger. □

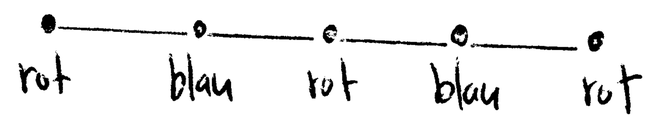
Def: Ein ungerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt k-färbbar ($k \in \mathbb{N}^*$), wenn es eine Abbildung $f: V \to \{1,2,\dots,k\}$ gibt, sodass $f(u) \neq f(v)$ $\forall u,v \in V$ mit $\{u,v\} \in E$. [d.h. 2 benachbarte Knoten in G bekommen immer verschiedene Farben].

Beispiele:

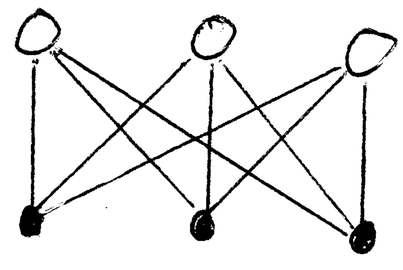
1) K_3 ist 3-färbbar, nicht 2-färbbar.



2) G:  ist 2-färbbar:



3) $K_{3,3}$ ist 2-färbbar:



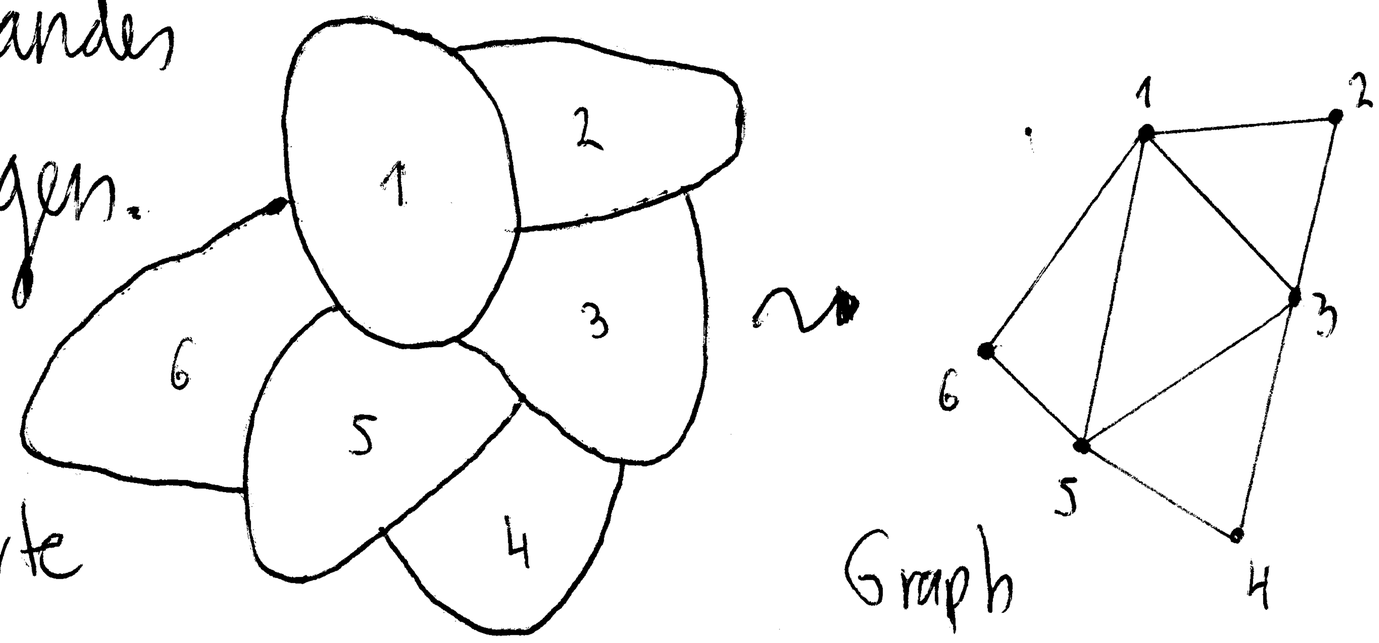
Satz 6.9 (Appel, Haken, 1977)

Jeder planare Graph $G=(V,E)$ ist 4-färbbar.

Beweis der Korrektheit durch massiven Computereinsatz. $\square$

Anders formuliert (Vierfarbensatz):

Jede Landkarte kann so mit 4 Farben gefärbt werden sodass keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe tragen.



Anwendungen für die Graphentheorie:

Graphen haben mannigfaltige Anwendungen in der realen Welt und sind auch für viele Probleme in der Informatik von essentieller Bedeutung. Hierbei werden die Problemstellungen jeweils so modelliert, dass sie mit der Darstellung als Graph kompatibel sind. Es müssen sich jedenfalls geeignete Ecken und Kanten finden lassen.

Einige Anwendungen sind:

- Die Simulierung von Verkehrsflüssen. Die Strassenkreuzungen sind hierbei die Ecken und die Kanten zwischen diesen sind die Strassen.
- Routenplaner. Wieder sind Ecken und Kanten stellvertretend für Städte/Orte und Strassen. Das Travelling Salesman Problem stellt hier zb besondere Anforderungen da es eine Rundreise kürzester Länge finden will, eben optimal geeignet für einen Vertreter der alle seine potentiellen Kunden mit möglichst wenig Aufwand besuchen will.
- Strukturformeln für Moleküle.
- Elektrische Netzwerke
- Frequenzzuweisungen im Mobilfunk
- In der Informatik zum Beispiel zum visualisieren von Speicherstrukturen. Oder auch um Prozesse zu beschreiben. Endliche Automaten sind ebenfalls Graphen.

[Aus Internet,
Herbert Huber]